统计与数据科学学院本科生2022–2023学年第一学期《非参数统计》期末考试试卷(A卷)

草 稿 区

任课教师:　　专业:　　年级:　　学号:　　姓名:　　成绩:

得 分

一、(15分) 给定来自$F(\cdot)$的随机样本 $\{X_i\}_{i=1}^n$, 其经验分布函数为: $F_n(x) = \frac{1}{n}\{\# \text{ of } X_i \le x\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{X_i \le x\}$, 则对于任意固定的 x, 我们有

(1) $\mathrm{MSE}(F_n(x)) = O(n^{-1})$, i.e., $F_n(x) \xrightarrow{p} F(x), \forall x$;

(2) $\sqrt{n}\left(F_n(x) - F(x)\right) \xrightarrow{d} N(0, F(x)(1-F(x)))$;

(3) 叙述 Delta 方法，并给出 $\sqrt{F_n(x)}$ 的分布.

得 分

二、(15分) (1) 单样本Wilcoxon符号秩检验的基本原理

(2) 设样本$X_1, X_2, \ldots, X_n$是取自总体X的简单随机样本，R_i为X_i的秩, 计算 $E(R_i)$和 $\mathrm{var}(R_i)$

得 分

三、(30分) 对于来自同一密度函数 $f_X(\cdot)$ 的独立同分布的观测值 $\{X_i\}_{i=1}^n$，考虑其密度估计:

(1) 如何检验样本是否来自正态分布

(2) 写出核密度估计的一般形式，并列出主要的条件

(3) 采用二阶对称核函数，计算以上核密度估计的偏差

(4) 对于核密度估计中的窗宽选取，给出一种方法的基本思想

(5) 给定一元核密度估计的渐近分布 $\sqrt{nh}(\hat{f}(x) - f(x) - \frac{\mu_2(k)}{2}f^{(2)}(x)h^2) \xrightarrow{d} N(0, f(x)R(k))$, $\int u^2k(u)du = \mu_2(k) \in (0,\infty)$, $\int k^2(u)du = R(k) < \infty$. 如何构造密度估计的 95% 逐点置信区间

(6) Bootstrap 方法构造密度估计的置信区间

得 分

四、(20分) 对于随机样本 $\{X_t, Y_t\}_{t=1}^N$, 考虑非参数回归模型 $Y_t = m(X_t) + u_t$, 其中 $E(u_t \mid X = X_t) = 0$, $E(u_t^2 \mid X = X_t) = \sigma^2(X_t)$

(1) 写出局部常数估计的目标函数，给出 $m(\cdot)$ 的 Nadaraya-Watson (NW) /局部常数估计

(2) 简述 Sieve/Series 方法估计 $m(\cdot)$

(3) 简述如何估计 $\sigma^2(\cdot)$

(4) 给出条件分布函数的一个估计, $F(y|x) = Pr(Y_i \le y|X_i = x) = E(I(Y_i \le y)|X_i = x)$

得 分

五、(10分) (1) 列出一个半参数模型，与非参数回归模型对比，讨论该模型的特点

(2) 任选一种方法来对上述半参数模型中未知参数/非参数函数进行估计

得 分

六、(10分) (1) 简述一个非参数假设检验的基本步骤，例如拟合优度检验、独立性检验、密度相关的假设检验、非/半参数回归函数的假设检验等

(2) 简述Bootstrap方法在上述检验中的应用