数理科学与大数据本科生2022-2023学年第一学期“数学分析I”期末考试试卷（A卷）参考解答

一、(15分) 求不定积分$\displaystyle\int\frac{\ln^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$.

解 应用分部积分法，有

$$\begin{aligned}
&\int\frac{\ln^2 x}{x^2}\mathrm{d}x\\
=&\int\ln^2 x\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right)\\
=&-\frac{\ln^2 x}{x}-\int\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\
=&-\frac{\ln^2 x}{x}+2\int\ln x\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right)\\
=&-\frac{\ln^2 x}{x}-\frac{2\ln x}{x}-2\int\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\
=&-\frac{\ln^2 x}{x}-\frac{2\ln x}{x}-\frac{2}{x}+C\\
=&-\frac{\ln^2 x+2\ln x+2}{x}+C.
\end{aligned}$$

□

二、(15分) 求极限$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}-\mathrm{e}^{\sin x}}{x\cos x-\sin x}$.

解 应用泰勒公式，得

$$x\cos x-\sin x=x\left[1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]-\left[x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]=-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\quad(x\to 0).$$

由等价无穷小量替换的方法和泰勒公式，得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\arctan x}-\mathrm{e}^{\sin x}\\
=&\mathrm{e}^{\sin x}\left(\mathrm{e}^{\arctan x-\sin x}-1\right)\\
\sim&\arctan x-\sin x\\
=&\left[x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right]-\left[x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]\\
=&-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\quad(x\to 0).
\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}-\mathrm{e}^{\sin x}}{x\cos x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}=\frac{1}{2}.$$

□

三、(15分) 设函数$f(x)$在$[0,2]$连续，$f(2)-f(0)=2$. 证明：存在$\xi\in[0,1]$, 使得

$$f(\xi+1)=f(\xi)+1.$$

证 令$g(x)=f(x+1)-f(x)-1$, $x\in[0,1]$, 则$g(x)$在$[0,1]$连续且

$$g(0)+g(1)=[f(1)-f(0)-1]+[f(2)-f(1)-1]=f(2)-f(0)-2=0.$$

若$g(0)=0$, 则取$\xi=0$, 就有$f(\xi+1)-f(\xi)-1=0$, 故$f(\xi+1)=f(\xi)+1$; 若$g(0)\neq 0$, 则由$g(0)+g(1)=0$得$g(0)g(1)=-g^2(0)<0$, 根据根的存在定理知存在$\xi\in(0,1)$, 使得$g(\xi)=0$, 从而得$f(\xi+1)=f(\xi)+1$. 综合以上讨论知，存在$\xi\in[0,1]$, 使得

$$f(\xi+1)=f(\xi)+1.$$

□

四、(15分) 设$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续，$g(x)$在$[a,+\infty)$上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$. 证明：$g(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续.

解 先证明下面两个命题.

命题1. 设函数$f(x)$在$[a,+\infty)$连续且

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A<+\infty,$$

则$f(x)$在$[a,+\infty)$一致连续.

命题1的证明. 由$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, 根据柯西收敛原理, 对任何$\varepsilon>0$, 都存在$X>a$, 使当$x,x'\geqslant X$时, 就有

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon.$$

函数$f(x)$在$[a,X+1]$上连续, 从而一致连续, 于是对上述的$\varepsilon>0$, 都存在$\delta_1>0$, 使当$x,x'\in[a,X+1]$且$|x-x'|<\delta_1$时, 就有

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon.$$

于是令$\delta = \min\{1, \delta_1\}$, 则当$x, x' \in [a, +\infty)$且$|x - x'| < \delta$时, x, x'同属于$[a, X+1]$或$[X, +\infty)$, 从而总有

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

按定义知$f(x)$在$[a, +\infty)$上一致连续.

命题2. 设$f(x)$和$g(x)$都在区间I一致连续，则$f(x) \pm g(x)$在区间I一致连续.

命题2的证明. 因为$f(x)$和$g(x)$都在区间I一致连续，所以对任给的$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 当$x, y \in I$且$|x - y| < \delta$时，有

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}\text{且}|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当$x, y \in I$且$|x - y| < \delta$时，有

$$|[f(x) \pm g(x)] - [f(y) \pm g(y)]| \leqslant |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

按定义知$f(x) \pm g(x)$在区间I一致连续.

回到原问题. 由$f(x)$在$[a, +\infty)$上一致连续和$g(x)$在$[a, +\infty)$上连续知$f(x) - g(x)$在$[a, +\infty)$上连续，结合$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$, 应用命题1知$f(x) - g(x)$在$[a, +\infty)$上一致连续. 再由命题2知$g(x) = f(x) - [f(x) - g(x)]$在$[a, +\infty)$上一致连续. □

五、(15分) 叙述区间套定理，并用区间套定理证明“闭区间上的连续函数必有界”.

解 区间套定理：设$\{[a_n, b_n]\}$是一列闭区间, 满足:

(i) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n], n = 1, 2, 3, \ldots;$

(ii) 区间长度收敛于0, 即$\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$.

则存在唯一的实数ξ, 使得ξ是区间列$\{[a_n, b_n]\}$的唯一公共点, 且

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = \xi.$$

下面用反证法证明“闭区间上的连续函数必有界”. 反证. 若不然，则存在$[a, b]$和其上的连续函数$f(x)$, 使得$f(x)$在$[a, b]$无界. 令$[a_1, b_1] = [a, b]$, 把闭区间$[a_1, b_1]$等

分成两个区间$\left[a_1,\dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$和$\left[\dfrac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$. 由$f(x)$在$[a,b]$无界知$f(x)$在$\left[a_1,\dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$无界或$f(x)$在$\left[\dfrac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$无界. 若$f(x)$在$\left[a_1,\dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$无界, 记$[a_2,b_2]=\left[a_1,\dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$; 否则, 记$[a_2,b_2]=\left[\dfrac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$. 无论哪种情况, 都满足: $f(x)$在$[a_2,b_2]$无界. 再把$[a_2,b_2]$等分成两个区间, 选择$f(x)$在其上无界的一个区间记为$[a_3,b_3]$.

依此类推, 得到一列闭区间$\{[a_n,b_n]\}$, 使得$f(x)$在$[a_n,b_n]$无界, $n=1,2,\cdots$. 并且该区间列还满足:

(i) $[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq\cdots\supseteq[a_n,b_n]\supseteq\cdots$;

(ii) $b_n-a_n=\dfrac{b_1-a_1}{2^{n-1}}\to 0\ (n\to\infty)$.

由区间套定理, 有唯一的$\xi=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

因为$f(x)$在$[a,b]$连续，所以由连续函数的局部有界性定理知存在$\delta>0$, 使得$f(x)$在$(\xi-\delta,\xi+\delta)\cap[a,b]$上有界. 由$\xi=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$知，对上述$\delta>0$, 存在正整数$N$, 当$n>N$时，有$a_n,b_n\in(\xi-\delta,\xi+\delta)$. 于是当$n>N$时，$f(x)$在$[a_n,b_n]$有界，与$f(x)$在所有的$[a_n,b_n]$上都无界矛盾！ □

六、(15分) 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的函数，$x_1\in\mathbb{R}$, $x_{n+1}=f(x_n)$, $n=1,2,\cdots$. 已知数列$\{x_n\}$收敛于a且$x_n\neq a$, $n=1,2,\cdots$, $f(x)$在点a可导. 证明：$|f'(a)|\leqslant 1$.

证 由$f(x)$在点a可导知$f(x)$在点a连续. 因为数列$\{x_n\}$收敛于a, 所以在$x_{n+1}=f(x_n)$两边令$n\to\infty$取极限，结合$f(x)$在点a连续得$a=f(a)$. 由导数的定义得

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-a}{x-a}.$$

又数列$\{x_n\}$收敛于a且$x_n\neq a$, $n=1,2,\cdots$, 故由海涅定理得

$$f'(a)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-a}{x_n-a}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-a}{x_n-a}.$$

下面用反证法证明“$|f'(a)|\leqslant 1$”. 反证. 若不然，则$|f'(a)|>1$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}-a}{x_n-a}\right|=|f'(a)|>1.$$

由极限保序性定理知存在正整数N, 使得当$n \geqslant N$时，有

$$\left|\frac{x_{n+1}-a}{x_n-a}\right| > 1.$$

记$\varepsilon_0 = |x_N - a| > 0$, 由上可知当$n > N$时，有$|x_n - a| > |x_N - a| = \varepsilon_0 > 0$, 与数列$\{x_n\}$收敛于$a$矛盾！ $\square$

七、(10分) 设函数$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)可导，$f(a) = b$, $f(b) = a$. 证明：存在$\xi_1, \xi_2 \in (a,b)$, $\xi_1 < \xi_2$, 使得$f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 1$.

证 令$g(x) = f(x) - x$, 则$g(x)$在$[a,b]$连续. 又$g(a) = f(a) - a = b - a > 0$, $g(b) = f(b) - b = a - b < 0$, 故由根的存在定理知存在$\xi \in (a,b)$, 使得$g(\xi) = 0$, 从而$f(\xi) = \xi$. 由拉格朗日中值定理知存在$\xi_1 \in (a,\xi)$和$\xi_2 \in (\xi, b)$, 使得

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\xi)-f(a)}{\xi - a} = \frac{\xi - b}{\xi - a},$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(b)-f(\xi)}{b-\xi} = \frac{a-\xi}{b-\xi},$$

于是有

$$f'(\xi_1)f'(\xi_2) = \frac{\xi-b}{\xi-a}\cdot\frac{a-\xi}{b-\xi} = 1.$$

$\square$

另证 由拉格朗日中值定理知存在$\xi \in (a,b)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{a-b}{b-a} = -1.$$

下面分情形进行讨论.

(1) 存在$\eta \in (a,b)$, $\eta \neq \xi$, 使得$f'(\eta) = -1$的情形.

这时，取$\xi_1 = \min\{\xi, \eta\}$, $\xi_2 = \max\{\xi, \eta\}$, 则$\xi_1, \xi_2 \in (a,b)$, $\xi_1 < \xi_2$, 且$f'(\xi_1)f'(\xi_2) = (-1)^2 = 1$.

若情形(1)不成立，则由达布定理知$f'(x)$在(a,ξ)和(ξ,b)上或者恒大于-1或者恒小于-1. 再分四种情形进行讨论.

(2) $f'(x)$在(a,ξ)和(ξ,b)上都恒大于-1的情形.

这时，由拉格朗日中值定理知存在$\eta_1 \in (a,\xi)$和$\eta_2 \in (\xi,b)$, 使得

$$f(\xi) - f(a) = f'(\eta_1)(\xi - a),$$

$$f(b) - f(\xi) - f'(\eta_2)(b - \xi).$$

由$f'(x)$在(a,ξ)和(ξ,b)上都恒大于-1知$f(\xi) - f(a) > -(\xi - a)$且$f(b) - f(\xi) > -(b - \xi)$, 从而

$$f(b) - f(a) = [f(b) - f(\xi)] + [f(\xi) - f(a)] > -(b - \xi) - (\xi - a) = a - b,$$

与$f(b) - f(a) = a - b$矛盾！因此，在题设条件下情形2不发生.

(3) $f'(x)$在(a,ξ)和(ξ,b)上都恒小于-1的情形.

这时，与情形(2)类似可导出矛盾，故在题设条件下情形3不发生.

(4) $f'(x)$在(a,ξ)上恒大于-1, 在(ξ,b)上恒小于-1的情形.

这时，任意取定$x_1 \in (a,\xi)$和$x_2 \in (\xi,b)$, 由达布定理知$f'(x)$能取到$f'(x_2)$到$f'(x_1)$之间的所有值. 取$\varepsilon \in (0,1)$足够小，使得$-1 + \varepsilon < f'(x_1)$, $\dfrac{1}{-1+\varepsilon} > f'(x_2)$, 则存在$\xi_1 \in (x_1,\xi)$, $\xi_2 \in (\xi,x_2)$, 使得$f'(\xi_1) = -1 + \varepsilon$, $f'(x_2) = \dfrac{1}{-1+\varepsilon}$, 从而$f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 1$.

(5) $f'(x)$在(a,ξ)上恒小于-1, 在(ξ,b)上恒大于-1的情形.

这时，与情形(4)类似可证存在$\xi_1, \xi_2 \in (a,b)$, $\xi_1 < \xi_2$, 使得$f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 1$.

综合以上讨论知存在$\xi_1, \xi_2 \in (a,b)$, $\xi_1 < \xi_2$, 使得$f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 1$. $\square$