

2022-2023 学年数学分析 3-3 (大类) 期末测试

命题: 李佳傲 (回忆: Mathzwj)

一. (1) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$ 的和函数及收敛区间; (2) 计算 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$.

二. 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调递减且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ 收敛, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

三. 设 $f_n(x) = x^n$. 证明: (1) $\{f_n(x) - f_{2n}(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上逐点收敛但非一致收敛; (2) $\{f_n(x) - f_{n+1}(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛.

四. 求 $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 1, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$ 的傅里叶级数及其和函数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

五. 设 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$, 求证 Parseval 等式成立:

$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$. 其中 $a_0, a_n, b_n (n \geq 1)$ 为 $f(x)$ 的傅里叶系数.

六. (1) 判断 $\int_0^{+\infty} x \cos x^4 dx$ 的敛散性; (2) 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} \ln \frac{2 + \cos x}{2 - \cos x} dx$.