2022-2023 学年复变函数期末测试

命题:高泳昕（回忆:Mathzwj)

一.求 $f\left(z\right)=\dfrac{z+1}{z^2\left(z-1\right)}$ 在 $\left|z\right|>1$ 中的 $Laurent$ 展开式.

二.计算 $f\left(z\right)=\dfrac{e^z}{z^2-1}$ 在无穷远点处的留数.

三.判断 $f\left(z\right)=\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}$ 的所有在扩充复平面上的孤立奇点的类型(如果是极点需指明阶数).

四.求方程 $z^7-100z^4+2z^2-1=0$ 在 $\left|z\right|<1$ 中的解的个数.

五.利用留数定理计算 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2x}{5-4\cos x}dx$.

六.设 $f\left(z\right)$ 在 $\left|z\right|<1$ 内解析,$\left|f\left(z\right)\right|\le 1$, $f\left(0\right)=f'\left(0\right)=0$,证明:$\left|f\left(z\right)\right|\le\left|z\right|^2$.

七.设 $f\left(z\right)$ 在 $\left|z\right|>R$ 内解析且有界,对 $r>R$,定义 $I\left(r\right)=\max_{|z|=r}\left|f\left(z\right)\right|$,证明:$I\left(r\right)$ 单减.

八.设 $f\left(z\right)$ 在 $\left|z\right|<1$ 内解析,$\left|f\left(z\right)\right|\le\dfrac{1}{1-\left|z\right|}$,证明:对任意正整数 n ,$\dfrac{\left|f^{(n)}\left(0\right)\right|}{\left(n+1\right)!}\le e$.