2021 级南开大学数学伯苓班动态进出试题——数学分析

考试时间：2022 年 9.25 日 8:30-11:30　满分 100 分

一、(10 **分**) 设由 $5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2yz-2zx-72=0$ 所确定的隐函数为 $z=z(x,y)$，求 z 的极值.

二、(15 **分**) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上三次可导, 且 $f(x)$ 和 $f'''(x)$ 均有界, 证明: $f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

三、(15 **分**) 设 $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 上可导，且 $\lambda>0$.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to0^+}(f(x)-\lambda xf'(x))=0$，证明 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$；

(2) 若 $\lim\limits_{x\to0^+}(f(x)+\lambda xf'(x))=0$，是否一定有 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$？证明你的结论.

四、(15 **分**) 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 J 可测区域, $f(X)$ 是定义在 D 上的可积函数, 且 $\inf\limits_{X\in D}|f(X)|=m>0$, $\sup\limits_{X\in D}|f(X)|=M$，证明：

$$\left(\int_D f^2(X)\mathrm{d}\Omega\right)\left(\int_D \frac{1}{f^2(X)}\mathrm{d}\Omega\right)\le\frac{[(m^2+M^2)V_J(D)]^2}{4m^2M^2}.$$

五、(15 **分**) 设定义在 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $\overline{\lim\limits_{t\to x}}f(t)\le f(x)$(其中在端点处即为单侧极限)

(1) 证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有上界；

(2) 证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取得最大值.

六、(10 **分**) 设 $D=\{(x,y)|x>0,y>0\}$，$f(x,y)$ 定义在 D 上且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0$，设 $\{a_n\}$ 为正项数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}=0$，若对任意 $m,n\in\mathbb{N}^*$，有 $a_{m+n}\le f(a_m,a_n)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

七、(20 **分**) 求 α 的取值范围，使得 $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 有原函数，并说明理由.