2021-2022 学年度第一学期伯苓班数分 3-3 期中考试

回忆人：xyc

一 证明

$$\int_0^{2\pi} \frac{ab}{a^2 \sin t + b^2 \cos t} \, \mathrm{d}t = 2\pi.$$

二 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中的有界区域. L 是 D 的边界, 是逐段光滑简单闭曲线. $u(x,y), v(x,y) \in C^2(D)$. 有 $u|_L = v|_L$ 且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \forall u \in D$. 证明:

$$\iint_D |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \iint_D |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

三 判断下列级数的敛散性并证明.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n + \frac{1}{n})}{n}, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{1+\frac{1}{n}}}.$$

四 记 $x \ne 0, -1, -2, \dots$. 证明级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 和 $\dfrac{a_n n!}{x(1+x)(2+x)\cdots(n+x)}$ 同时收敛或同时发散.

五 求 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{b \sin ax - a \sin bx}{x^2} \, \mathrm{d}x.$

六 讨论下列广义积分的敛散性.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos \frac{1}{x}}{x} \, \mathrm{d}x.$$