数理科学与大数据本科生2020 — 2021学年第二学期“数学分析II”期末考试试卷(A卷)

草 稿 区

任课教师: **学号:** **姓名:** **成绩:**

一	二	三	四	五	六

得 分

一、(15分) 设$u(x,y) = x\ln(x+r) - r$, 其中$r = \sqrt{x^2+y^2}$. 求证:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x+r}.$$

解 由导数的四则运算法则和链式法则，有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \ln(x+r) + x\cdot\frac{1}{x+r}\cdot\left(1+\frac{x}{r}\right) - \frac{x}{r} = \ln(x+r),\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= x\cdot\frac{1}{x+r}\cdot\frac{y}{r} - \frac{y}{r} = -\frac{y}{x+r}.
\end{aligned}$$

进而得到

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{x+r}\cdot\left(1+\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{r},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{(x+r) - y\cdot\frac{y}{r}}{(x+r)^2} = -\frac{rx+x^2}{r(x+r)^2} = -\frac{x}{r(x+r)}.
\end{aligned}$$

因此，有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{r} - \frac{x}{r(x+r)} = \frac{1}{x+r}.$$

□

草 稿 区

得 分

二、(30分，每小题15分) 计算下列各题.

(1) 判断极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$ 是否存在, 如果存在并求其值.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\displaystyle\int_x^{\sqrt{x}} \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

解 (1) 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$ 存在. 令 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 就有

$$0 \leqslant \left|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} = \frac{r^3|\cos^3\theta+\sin^3\theta|}{r^2} \leqslant 2r.$$

当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，有 $r\to 0^+$. 因此，由两边夹定理知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}=0$.

(2) 令 $F(x)=\displaystyle\int_x^1 \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$, $x\in(0,1]$, 则 $F(x)=-\displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$, 从而由微积分基本定理知

$$F'(x) = -\frac{f(x)}{x^2}, \quad \forall x\in(0,1].$$

由洛必达法则得

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to 0^+} x\int_x^{\sqrt{x}} \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
= & \lim_{x\to 0^+} x[F(x)-F(\sqrt{x})] \\
= & \lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)-F(\sqrt{x})}{\frac{1}{x}} \\
= & \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{f(x)}{x^2}-\left(-\frac{f(\sqrt{x})}{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{-\frac{1}{x^2}} \\
= & \lim_{x\to 0^+} \left[f(x)-\frac{\sqrt{x}f(\sqrt{x})}{2}\right] \\
= & f(0)-0 \\
= & f(0).
\end{aligned}$$

□

草 稿 区

得 分

三、(15分) 设$f(x) \in C^2([0,\pi])$, 且$f(0)=3$. 已知$\int_0^\pi [f(x)+f''(x)]\sin x\ \mathrm{d}x = 10$, 求$f(\pi)$.

解 由分部积分法，得

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\pi f(x)\sin x\ \mathrm{d}x \\
=\ & (-\cos x)f(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x)f'(x)\ \mathrm{d}x \\
=\ & f(\pi)+f(0)+\int_0^\pi f'(x)\cos x\ \mathrm{d}x \\
=\ & f(\pi)+3+\sin x\cdot f(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\cdot f''(x)\ \mathrm{d}x \\
=\ & f(\pi)+3-\int_0^\pi f''(x)\sin x\ \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

于是有

$$\int_0^\pi [f(x)+f''(x)]\sin x\ \mathrm{d}x = f(\pi)+3.$$

又已知$\int_0^\pi [f(x)+f''(x)]\sin x\ \mathrm{d}x = 10$, 故$f(\pi)+3=10$, 解得$f(\pi)=7$. □

草 稿 区

得 分

四、(15分) 求球体$x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$被圆柱面$x^2+y^2=ax$ $(a>0)$所割下部分立体的体积.

解 记$f(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leqslant ax\right\}$, 则球体$x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$被圆柱面$x^2+y^2=ax$ $(a>0)$所割下部分的立体为

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|(x,y)\in D,-f(x,y)\leqslant z\leqslant f(x,y)\right\}.$$

于是其体积为

$$V_J(\Omega)=\int_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{-f(x,y)}^{f(x,y)}\mathrm{d}z=2\iint_D f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

在极坐标下，$x^2+y^2\leqslant ax$就是$r\leqslant a\cos\theta$, 于是D可以表示为

$$D=\left\{(r,\theta)\middle|-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant a\cos\theta\right\}.$$

因此，所求体积为

$$\begin{aligned}
V_J(\Omega)&=2\iint_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{a^2-r^2}\ r\mathrm{d}r\\
&=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^{a\cos\theta}\mathrm{d}\theta\\
&=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}(a^3-a^3|\sin\theta|^3)\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{2}{3}\pi a^3-\frac{4}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{2}{3}\pi a^3-\frac{4}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)\mathrm{d}(-\cos\theta)\\
&=\frac{2}{3}\pi a^3-\frac{4}{3}a^3\int_0^1(1-u^2)\mathrm{d}u\ (u=\cos\theta)\\
&=\frac{2}{3}\pi a^3-\frac{4}{3}a^3\left(u-\frac{1}{3}u^3\right)\Bigg|_0^1\\
&=\frac{2}{3}\pi a^3-\frac{8}{9}a^3.
\end{aligned}$$

□

草 稿 区

得 分

五、(15分，第一问5分，第二问10分)
(1) 隐函数存在定理可以保证在哪些点的邻域内，由方程

$$2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4=0$$

可唯一地确定隐函数$z=z(x,y)$?
(2) 求隐函数$z=z(x,y)$的极值.

解 (1) 令$f(x,y,z)=2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4$, 则$f'_z=2z-4$. 因为$f$和$f'_z$都连续，所以由隐函数存在定理知，当$f(x_0,y_0,z_0)=0$且$f'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$时，在$(x_0,y_0,z_0)$的一个邻域内，方程$f(x,y,z)=0$可唯一地确定隐函数$z=z(x,y)$. 因此，隐函数存在定理可以保证在$f(x_0,y_0,z_0)=0$且$z_0\neq 2$点$(x_0,y_0,z_0)$的一个邻域内，方程$f(x,y,z)=0$可唯一地确定隐函数$z=z(x,y)$.
(2) 方程$2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4=0$两边对$x$求导，得

$$4x+2z\cdot z'_x+2y-2-4z'_x=0,$$

方程$2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4=0$两边对$y$求导，得

$$2y+2z\cdot z'_y+2x-2-4z'_y=0.$$

由极值的必要条件知，在临界点处有$z'_x=z'_y=0$. 因此，临界点满足方程组$\begin{cases}4x+2y-2=0,\\ 2x+2y-2=0.\end{cases}$ 解得$x=0$, $y=1$, 故隐函数$z=z(x,y)$的临界点为$(0,1)$. 将$x=0$, $y=1$代入到方程$2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4=0$中，得$z^2-4z+3=0$, 解得$z_1=1$, $z_2=3$. 下面分别讨论$z(0,1)=1$和$z(0,1)=3$的情形.
(i) $z(0,1)=1$的情形.
方程$4x+2z\cdot z'_x+2y-2-4z'_x=0$两边对$x$求导，得$4+2(z'_x)^2+2z\cdot z''_{xx}-4z''_{xx}=0$, 解得$z''_{xx}=\dfrac{(z'_x)^2+2}{2-z}$.
方程$4x+2z\cdot z'_x+2y-2-4z'_x=0$两边对$y$求导，得$2z'_yz'_x+2z\cdot z''_{xy}+2-4z''_{xy}=0$, 解得$z''_{xy}=\dfrac{z'_xz'_y+1}{2-z}$.
方程$2y+2z\cdot z'_y+2x-2-4z'_y=0$两边对$y$求导，得$2+2(z'_y)^2+2z\cdot z''_{yy}-4z''_{yy}=0$, 解得$z''_{yy}=\dfrac{(z'_x)^2+1}{2-z}$.
由$z(0,1)=1$, $z'_x(0,1)=z'_y(0,1)=0$得$z''_{xx}(0,1)=2$, $z''_{xy}(0,1)=1$, $z''_{yy}(0,1)=1$. 因此，由黑塞矩阵$H_z(0,1)=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}>0$知1为隐函数$z=z(x,y)$的极小值.
(ii) $z(0,1)=3$的情形.
由$z(0,1)=3$, $z'_x(0,1)=z'_y(0,1)=0$得$z''_{xx}(0,1)=-2$, $z''_{xy}(0,1)=-1$, $z''_{yy}(0,1)=-1$. 因此，由黑塞矩阵$H_z(0,1)=\begin{pmatrix}-2&-1\\-1&-1\end{pmatrix}<0$知3为隐函数$z=z(x,y)$ 的极大值. □

草 稿 区

得 分

六、(10分) 设$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$为二阶连续可微函数，对任意$X\in\mathbb{R}^n$, $H_f(X)-I_n$都是半正定对称矩阵，其中$H_f(X)$是f在X的黑塞矩阵，I_n是n阶单位矩阵. 证明：$f(X)$在$\mathbb{R}^n$上有最小值.

证 对任意$X\in\mathbb{R}^n$, 由泰勒公式得

$$f(X)=f(O)+\langle\nabla f(O),X\rangle+\frac{1}{2}X\cdot H_f(\theta X)\cdot X^T,\ 0<\theta<1.$$

因为$H_f(\theta X)-I_n$是半正定对称矩阵，所以$X\cdot[H_f(\theta X)-I_n]\cdot X^T\geqslant 0$. 由此即得

$$X\cdot H_f(\theta X)\cdot X^T\geqslant X\cdot X^T=|X|^2.$$

由柯西不等式知$|\langle\nabla f(O),X\rangle|\leqslant|\nabla f(O)|\cdot|X|$, 于是有

$$f(X)\geqslant\frac{1}{2}|X|^2-|\nabla f(O)|\cdot|X|+f(O).$$

由此即知$\lim\limits_{|X|\to+\infty}f(X)=+\infty$. 因此，对$M=|f(O)|+1>0$, 存在$K>0$, 当$|X|>K$时，就有$f(X)>M$. 记$D=\left\{X\in\mathbb{R}^n\,\middle|\,|X|\leqslant K\right\}$, 则$D$是有界闭集. 于是连续函数$f$在$D$上取得最大值和最小值. 设$X_0\in D$是$f$在$D$上的一个最小值点，则$f(X_0)\leqslant f(O)<M$. 因为当$|X|>K$时，就有$f(X)>M$, 所以$f(X_0)$就是$f(X)$在$\mathbb{R}^n$上的最小值. $\square$