

任课教师: 学号: 姓名: 成绩:

一	二	三	四	五	六

得分 一、(15分) 写出函数 $f(x, y) = \frac{e^x}{\cos y}$ 在 $(0, 0)$ 点邻近的二阶泰勒展开式.

解

$$\begin{aligned} & \frac{e^x}{\cos y} \\ &= \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{1 - \frac{y^2}{2} + o(y^2)} \\ &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \left(1 + \frac{y^2}{2} + o(y^2)\right) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + o(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

□

另解 对 $f(x, y) = \frac{e^x}{\cos y}$ 求偏导, 得 $f'_x = \frac{e^x}{\cos y}$, $f'_y = \frac{e^x \sin y}{\cos^2 y}$, $f''_{xx} = \frac{e^x}{\cos y}$, $f''_{xy} = f''_{yx} = \frac{e^x \sin y}{\cos^2 y}$, $f''_{yy} = \frac{2e^x \sin^2 y}{\cos^3 y} + \frac{e^x}{\cos y}$. 由此知 $f(0, 0) = 1$, $f'_x(0, 0) = 1$, $f'_y(0, 0) = 0$, $f''_{xx}(0, 0) = 1$, $f''_{xy}(0, 0) = f''_{yx}(0, 0) = 0$, $f''_{yy}(0, 0) = 1$. 因此有

$$\frac{e^x}{\cos y} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + o(x^2 + y^2).$$

□

得分 二、(30分) 求下列方向导数和偏导数.

(1) 设 $f(x, y) = \ln(e^x + 2e^y)$, $\vec{l} = (\cos \theta, \sin \theta)$, 其中 $\theta \in [0, 2\pi)$, 求 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(0, 0)$;

(2) 设 z 为由方程 $z^3 - xz - y = 0$ 确定的 x, y 的隐函数, 求 z''_{xy} .

解 (1) 由 $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + 2e^y}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2e^y}{e^x + 2e^y}$ 都在 \mathbb{R}^2 上连续知 $f(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 上连续可微. 于是有

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(0, 0) = \langle \nabla f(0, 0), \vec{l} \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right), (\cos \theta, \sin \theta) \right\rangle = \frac{1}{3} \cos \theta + \frac{2}{3} \sin \theta.$$

(2) 方程 $z^3 - xz - y = 0$ 两边对 x 求导, 得 $3z^2 z'_x - z - xz'_x = 0$, 解得

$$z'_x = \frac{z}{3z^2 - x}.$$

上式两边对 y 求导, 得

$$z''_{xy} = \frac{z'_y(3z^2 - x) - z \cdot 6zz'_y}{(3z^2 - x)^2} = -\frac{(3z^2 + x)z'_y}{(3z^2 - x)^2}.$$

方程 $z^3 - xz - y = 0$ 两边对 y 求导, 得 $3z^2 z'_y - xz'_y - 1 = 0$, 解得

$$z'_y = \frac{1}{3z^2 - x}.$$

于是有

$$z''_{xy} = -\frac{3z^2 + x}{(3z^2 - x)^3}.$$

□

得分 三、(15分) 在曲线 $x = \cos t, y = \sin t, z = e^t$ 上求一点, 使得该曲线在此点的切线平行于平面 $\sqrt{3}x + y - 4 = 0$.

解 在点 $(\cos t, \sin t, e^t)$ 处, 曲线 $x = \cos t, y = \sin t, z = e^t$ 的切向量是 $(-\sin t, \cos t, e^t)$, 平面 $\sqrt{3}x + y - 4 = 0$ 的法向量是 $(\sqrt{3}, 1, 0)$. 切线平行于平面当且仅当这两个向量正交, 于是有

$$-\sqrt{3} \sin t + \cos t = 0.$$

因为

$$-\sqrt{3} \sin t + \cos t = -2 \left(\sin t \cos \frac{\pi}{6} - \cos t \sin \frac{\pi}{6} \right) = -2 \sin \left(t - \frac{\pi}{6} \right),$$

所以由 $-\sqrt{3} \sin t + \cos t = 0$ 解得 $t = k\pi + \frac{\pi}{6}$, 对应的切点为

$$\left((-1)^k \frac{\sqrt{3}}{2}, (-1)^k \frac{1}{2}, e^{k\pi + \frac{\pi}{6}} \right),$$

其中 $k \in \mathbb{Z}$.

□

得分 四、(15分) 求函数 $f(x, y, z) = xyz$ 在条件 $x + y + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 下的极值.

解 由拉格朗日乘子法, 解方程组
$$\begin{cases} yz + 2\lambda x + \mu = 0, \\ xz + 2\lambda y + \mu = 0, \\ xy + 2\lambda z + \mu = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$
 由前三个方程, 根据齐次线性方程组有非零解

的充要条件得
$$\begin{vmatrix} yz & x & 1 \\ xz & y & 1 \\ xy & z & 1 \end{vmatrix} = 0,$$
 故 $(x - y)(y - z)(z - x) = 0$, 从而 $x = y$ 或 $y = z$ 或 $z = x$. 再结合后两

个方程解得条件临界点 $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

因为圆 $S: x + y + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 是有界闭集, 所以 $f(x, y, z)$ 在约束条件 S 下取得最小值和最大值. 因为条件最值点都是条件极值点, 现只有两个不同的条件临界值 $-\frac{\sqrt{6}}{18}$ 和 $\frac{\sqrt{6}}{18}$, 所以 $f(x, y, z)$ 在

约束条件 S 下最小值为 $-\frac{\sqrt{6}}{18}$, 最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{18}$. 于是6个条件临界点全是条件最值点, 从而全是条件极值

点. $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ 是条件极小点, 条件极小值为 $-\frac{\sqrt{6}}{18}$, $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right),$

$\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ 是条件极大点, 条件极大值为 $\frac{\sqrt{6}}{18}$. \square

得分 五、(15分) 设 n 元函数 $f(X)$ 在 $X_0 \in \mathbb{R}^n$ 的一个邻域内所有二阶偏导数都连续, 且 $\nabla f(X_0) = 0$, $f(X)$ 在 X_0 的黑塞矩阵 $H_f(X_0)$ 为正定矩阵. 证明: 存在 $\delta > 0$ 和 $\lambda > 0$, 使得当 $\Delta X \in \mathbb{R}^n$ 且 $0 < |\Delta X| < \delta$ 时, 就有 $f(X_0 + \Delta X) - f(X_0) > \lambda|\Delta X|^2$.

证 由 $\nabla f(X_0) = 0$ 知 X_0 是 $f(X)$ 的临界点, 故有

$$f(X_0 + \Delta X) = f(X_0) + \frac{1}{2}\Delta X \cdot H_f(X_0) \cdot \Delta X^T + o(|\Delta X|^2),$$

其中 $\Delta X \in \mathbb{R}^n$.

因为 $H_f(X_0) > 0$, 所以存在常数 $c > 0$ 使得

$$\Delta X \cdot H_f(X_0) \cdot \Delta X^T \geq c|\Delta X|^2, \quad \forall \Delta X \in \mathbb{R}^n.$$

事实上, 可设 $|\Delta X| \neq 0$. 记 $S^{n-1} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid |X| = 1\}$, 它是 \mathbb{R}^n 中的单位球面, 这是一个有界闭集从而为紧集, 在其上定义的函数

$$g(X) = X \cdot H_f(X_0) \cdot X^T, \quad X \in S^{n-1}$$

是连续函数, 从而有最小值 $c > 0$, 取 $X = \frac{1}{|\Delta X|}\Delta X \in S^{n-1}$, 可得所要的结论.

由于

$$\lim_{|\Delta X| \rightarrow 0} \frac{o(|\Delta X|^2)}{|\Delta X|^2} = 0,$$

从而存在 $\delta > 0$, 使得

$$|o(|\Delta X|^2)| < \frac{c}{4}|\Delta X|^2, \quad \Delta X \in \mathbb{R}^n, \quad |\Delta X| < \delta.$$

取 $\lambda = \frac{c}{4} > 0$, 则当 $\Delta X \in \mathbb{R}^n$ 且 $0 < |\Delta X| < \delta$ 时, 就有

$$\begin{aligned} & f(X_0 + \Delta X) - f(X_0) \\ &= \frac{1}{2}\Delta X \cdot H_f(X_0) \cdot \Delta X^T + o(|\Delta X|^2) \\ &> \frac{c}{2}|\Delta X|^2 - \frac{c}{4}|\Delta X|^2 \\ &= \frac{c}{4}|\Delta X|^2 \\ &= \lambda|\Delta X|^2. \end{aligned}$$

□

得分 六、(10分) 设 D 是 \mathbb{R}^n 中的凸开区域, $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是可微映射, 对任意 $X \in D$, 雅可比矩阵 $J_F(X)$ 都是正定矩阵, 证明: F 是单射.

证 反证. 若 F 不是单射, 则存在 $X_0 \in D, X_1 \in D, X_0 \neq X_1$, 使得 $F(X_0) = F(X_1)$. 由 D 是 \mathbb{R}^n 中的凸开区域知以 X_0, X_1 为端点的线段在 D 中. 以 X_0, X_1 为端点的线段可表示为

$$X = (1-t)X_0 + tX_1, t \in [0, 1].$$

令

$$\varphi(t) = \langle X_1 - X_0, F((1-t)X_0 + tX_1) \rangle, t \in [0, 1],$$

则 $\varphi(t)$ 在 $[0, 1]$ 可微,

$$\varphi(0) = \langle X_1 - X_0, F(X_0) \rangle = \langle X_1 - X_0, F(X_1) \rangle = \varphi(1).$$

根据罗尔定理知存在 $t_0 \in (0, 1)$, 使得 $\varphi'(t_0) = 0$. 记 $\xi = (1-t_0)X_0 + t_0X_1$, 则

$$\varphi'(t_0) = (X_1 - X_0) \cdot J_F(\xi) \cdot (X_1 - X_0)^T.$$

因为雅可比矩阵 $J_F(\xi)$ 是正定矩阵, $X_1 - X_0 \neq O$, 所以

$$(X_1 - X_0) \cdot J_F(\xi) \cdot (X_1 - X_0)^T > 0,$$

这与 $\varphi'(t_0) = 0$ 矛盾!

□