2019—2020 数学分析 3-3 期中考试（数学类）

一、（10 分）计算第一型曲线积分 $\oint_L x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}ds$ ，其中积分曲线为 $L{:}x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\ (a>0)$。

二、（10 分）计算第一型曲面积分 $\iint_{\Sigma}\frac{1}{z}dS$ ，Σ 为 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 被平面 $z=h\ (0<h<R)$ 所截的上半部分。

三、(10 分)计算第二型曲线积分 $\oint_L ydx+zdy+xdz$ ，其中 L 为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 与平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1$ 的交线在第一卦限的部分。(从 $x>0$ 方向看去，逆时针)

四、(10 分)计算第二型曲面积分 $\oint\!\!\!\!\oint_{\Sigma}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$ ，其中 Σ 为圆锥 $z^2=x^2+y^2$ 被 $z=h\ (h>0)$ 所截的外侧。

五、（10 分）已知第二型曲线积分 $\oint(10xy+8y)dx+(5x^2+8x+y)dy$

（1） 验证该曲线积分与路径无关。

（2） 计算从点 $(0,0)$ 到点 (a,b) 的该曲线积分的值。

六、（10 分）计算第二型曲线积分 $\oint_L(y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$ ，其中 L 为 $x^2+y^2+z^2=2Rx\ (R>0)$ 与 $x^2+y^2=2rx\ (r>0)$ 在第一卦限的交线（俯视，逆时针方向）。

七、（10 分）判断下列级数的敛散性

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a+n^b} \quad (a,b>0)$

（2）$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n}}-1-\frac{1}{n}$

八、（10 分）试问下级数收敛还是发散 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

九、（10 分）已知 $\sum_{n=0}^{\infty}A_n=A$ ，$\sum_{n=1}^{\infty}B_n=B$,u_k 是 $a_i b_j$ 按正方形法则排列组成的数列。

（1）证明 $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ 收敛。

（2）证明 $\sum_{k=1}^{\infty}u_k=AB$ 。

十、（10 分）讨论无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}$ 的敛散性。

（刘雨濠整理）