数学科学学院伯苓班2019 — 2020学年第一学期“数学分析3-1”期末考试试卷(A卷)

草 稿 区

专业: **年级:** **学号:** **姓名:** **成绩:**

得 分

一、(10分) 设$y = y(x)$是由方程$\mathrm{e}^y + xy = \mathrm{e}$确定的隐函数，求$y''(0)$.

得 分

二、(10分) 设$f(x) = (x^2+1)(\sin x + \cos x + \tan x)$, 求$f^{(10)}(0)$.

草 稿 区

得 分

三、(10分) 设$x \in (0,1)$, 证明：$x^x + (1-x)^{1-x} \geqslant \sqrt{2}$.

得 分

四、(12分) 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$两次可导，$|f(x)|^3$在$(-\infty,+\infty)$下凸. 证明：对任意实数x, 有$f(x)f''(x) + 2[f'(x)]^2 \geqslant 0$.

草 稿 区

得 分

五、(12分) 设函数$f(x)$在$[-1,1]$连续，在$(-1,1)$无穷次可导，对任意自然数n和任意$x \in (-1,0)\cup(0,1)$, 都有$\left|f^{(n)}(x)\right| < n!|x|$. 证明：$f(x)$在$[-1,1]$上恒等于0.

得 分

六、(12分) 设函数$f(x)$在$[0,1]$连续，在$(0,1)$可导，$f(0)=0$, $f(1)=1$. 证明：存在$\xi,\eta \in (0,1)$, $\xi < \eta$, 使得$f'(\xi)f'(\eta)=1$.

草 稿 区

得 分

七、(10分) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n\ln n}-n^2}{\ln(n!)}$.

草 稿 区

得 分

八、(10分) 设函数$f(x)$在$[-1,1]$无穷次可导，$f^{(n)}(-1) = f^{(n)}(1) = 0$, $n = 0,1,2,\cdots$, 且$f(x)$在$(-1,1)$中恒大于0. 证明：存在正整数k, 使得$\dfrac{f(x)}{(1-x^2)^k}$在$(-1,1)$中至少有3个极值点.

得 分

九、(7分) 设函数$f(x)$在$[0,1]$连续，$f(0) > 0$, $f(1) < 1$. 证明：存在$\eta \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$和$\xi \in (\eta, 1-\eta)$, 使得$f(\xi - \eta) + f(\xi) + f(\xi + \eta) = 3\xi$.

草 稿 区

得 分

十、(7分) 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数，且$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有界. 对任意实数h, 令$\varphi(h)=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x+h)+f(x-h)-2f(x)|$. 已知$\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0$, 问$f(x)$是否必在$(-\infty,+\infty)$上一致连续？证明你的结论.