2013-2014学年第一学期数学分析期中考试试题

一、（本题10分）用定义证明极限：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x(x^2-3x+2)}=-3.$

二、（本题10分）求下列极限：

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\sin 2x}$

三、（本题10分）设$x_1 > -6, x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}, n = 1, 2, \cdots$.证明数列$\{x_n\}$收敛，并求其极限。

四、（本题10分）若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \sigma_n = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n, \lambda_i > 0, i = 1, \cdots, n,$且$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_n} = 0$,试证$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n}{\sigma_n} = a$

五、（本题15分）设$f(x)=\begin{cases} x^m\sin\frac{1}{x} & ,x\neq 0; \\ 0 & ,x=0. \end{cases}$,$m$为正整数，试问:

(1).m为何值时，$f(x)$在$x=0$可导？

(2).m为何值时，$f'(x)$在$x=0$连续？

六、（本题10分）设$f(x)$在$x=0$可微，$f(0)=0$,证明：存在在$x=0$连续的函数$g(x)$,使得$f(x)=xg(x)$

七、（本题10分）设$f \in C(a,b), f(a+0)$与$f(b-0)$为有限值，证明：
（1）f在(a,b)有界；

(2)若$\exists c \in (a,b)$使得$f(c) \geqslant \max(f(a+0), f(b-0))$，则$f$在$(a,b)$能取到最大值。

八、（本题25分）求下列函数的导数或微分：
（1）已知$e^{x+y} - xy = 0$,求y'';

(2)已知$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$,求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$;

（3）x是自变量，$y=x^x$,求d^2y;

(4)u,v均是x的函数,$y=\sqrt{u^2+v^2}$,求d^2y;

(5)f任意阶可导,$y=f(e^x)\cdot e^{f(x)}$,求y''.