2020——2021 第一学期《图论》期末考试

命题人: 金应烈
2020 年 12 月 23 日

一. （15 分） 选择题
1. (3 分) 给定顶点集和边集判断是否为强连通图。
2. (3 分) 利用握手定理求顶点数和边数。
3. (3 分) 完全 m 叉树顶点数、内点、叶子数目关系。
4. (3 分) 给定编码集合，找出哪个不是前缀码。
5. (3 分) 不存在完美匹配的是 (奇圈)。

二. （15 分） 填空题
1. 由三个顶点组成的不同构的无向图有____________个, 组成的不同构的有向图有____________个。
2. 已知平面图有 6 个顶点，每个顶点的度为 4，则此平面图有____________面。
3. 对完全二部图 $K_{m,n}$, $\gamma(K_{m,n}) = $ ___________, $\chi'(K_{m,n}) = $ ___________.

三. （46 分） 证明题
1. (8 分) 连通图 $G$ 具有 Euler 路的充分必要条件是 $G$ 中有两个奇点。

2. (8 分) 设平面连通图 $G$ 中没有长为 3 的圈，证明:
   (1) $q$ 为 $G$ 的边数，$p$ 为 $G$ 的顶点数，$q \leq 2p - 4$。
   (2) $\delta(G) \leq 3$。

1
3. (10 分) 设 $\chi(G)$ 为图 $G$ 的色数，证明 $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$。

4. (10 分) 证明：(1) 若 $\delta(G) \geq 2$，则 $G$ 中含有圈。
(2) 树至多只有一个完美匹配。

5. (10 分) 平面上的 $n$ 个点被一些圆盘覆盖，且每个圆盘至少覆盖住 $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ 个点，证明对于任意两个点，总存在连接两点的曲线，使这条曲线完全被圆盘覆盖。（其中 $[x]$ 为取整函数）
（提示：构造图 $G$，顶点为圆盘，两个顶点相邻当且仅当有同一个点被圆盘覆盖，证明 $G$ 为连通图。）

四. (24 分) 简答题
1. (10 分) 对于圆 $C_n$，求 $\alpha(G), \beta(G), \alpha'(G), \beta'(G), \gamma(G)$。
2. (7 分) 设顶点的权分别为2, 3, 5, 7, 8。
   (1) 构造最优二叉树 $T$，并计算 $\omega(T)$。
   (2) 写出每个顶点对应的前缀码。

3. (7 分) 指出边色数和匹配数之间的关系，并说明理由。(提示：$\chi'(G)\alpha'(G) \geq |\epsilon(G)|$)

(17 物理，雨濠回忆)