2021-2022年秋季学期泛函分析期末考试试卷(A)

任课教师： 学号： 姓名： 成绩：

草 稿 区

得 分

一、 (15分) 设 A_1, A_2 是赋范空间 X 中的子集. 如果 A_1 是紧集, A_2 是闭集且 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. 证明: 存在 $r > 0$, 使得

$$(A_1 + U(0,r)) \cap A_2 = \emptyset,$$

其中 $U(0,r) = \{x \in X : \|x\| < r\}$.

得 分

二、 (15分) 当 $1 < r < s < \infty$ 时, 有 $L^s[a,b] \subset L^r[a,b]$.

得 分

三、 (15分) 设 A 是赋范空间 X 的子集. 证明: A 在 X 中是有界集当且仅, 当对任意的$x^* \in X^*$, 集合 $x^*(A) \equiv \{x^*(z) : z \in A\}$ 是有界集.

得 分

四、 (15分) 设 $\|\cdot\|$ 是 $C[0,1]$ 中的完备范数使得: 当 $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$ 时, 对任意的$t \in [0,1]$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x_0(t)$. 证明: $\|\cdot\|$ 等价于上确界范数 $\|\cdot\|_\infty$, 也即是: 存在常数 $C_1, C_2 > 0$ 使得

$$C_1\|x\|_\infty \le \|x\| \le C_2\|x\|_\infty, \quad \forall x \in C[0,1].$$

草 稿 区

得 分

五、 (15分) 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间, 对任意的 $x, y \in X$, 令

$$\rho(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{如果 } x=y, \\ \|x-y\|+1 & \text{如果 } x\neq y. \end{cases}.$$

证明: ρ 是 X 上的一个距离, 但不能由范数诱导.

得 分

六、 (15分) 设 X 是赋范空间, X_0是 X 的稠密子空间. 证明: 对于每一个 $x \in X$, 存在元列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_0$ 使得 $x=\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<\infty$.

草 稿 区

得 分

七、 (10分) 设 Y 是可分 Banach 空间 X 的闭子空间. 已知商空间 $X/Y \equiv \{x+Y : x \in X\}$ 在商范数

$$\|x+Y\| = \inf\{\|x+y\| : y \in Y\}$$

下仍然是 Banach 空间; 相应的商映射 $\pi : X \to X/Y$ 定义为

$$\pi(x) = x + Y, \quad \forall x \in X.$$

证明: X/Y 也是可分的.

草 稿 区