2021—2022 学年第一学期复变函数期末考试

一、用留数定理计算积分$\int_\Gamma \frac{dz}{z^4+1}$，其中$\Gamma: x^2+y^2=2x$.

二、求函数$f(z)=\frac{1}{z}e^{\frac{1}{z^2}}$在扩充复平面中的所有孤立奇点，并判断奇点类型.求$f(z)$在各个孤立奇点的去心邻域内洛朗展式.

三、求方程$z^4-5z+1=0$在$1<|z|$和$1<|z|<2$内的根的个数.

四、已知整函数$f(z)$，若存在正整数N，以及正数M,R，使得当$|z|>R$时有$|f(z)|\le M|z|^N$.证明：$f(z)$至多为N次多项式或为常数.

五、已知$f(z),g(z)$为非常数整函数，且$|f(z)|^2\le|g(z)|$.证明：若$g(z)$没有零点，则$f(z)$也没有零点.

六、已知函数$f(z)$在区域D中解析，C为D中以a,b为端点的直线段.证明：存在$\lambda,|\lambda|\le 1$，以及$\xi\in C$使得$f(b)-f(a)=\lambda(b-a)f'(\xi)$.