

实变函数论期末考试(A卷) 2020-2021(春)

考试时间: 2021年6月24日

1. 直线上点集 A . 若 A 中任意两点距离大于 1, 求证 A 为至多可数集.
2. 设 $\{E_n\}_{k=1}^{\infty}$ 为 \mathbb{R} 中一集族, 且满足 $\sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) < +\infty$. 证明:
 $m(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n) = 0$.
3. 集合 A, B, C , 满足 $m(A\Delta B) = m(B\Delta C) = 0$. 证明: $m(A\Delta C) = 0$.
4. 可测集 E , 一列可测函数 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 E 上依测度收敛到 f , 证明:
 $\{|f_n|\}_{n=1}^{\infty}$ 在 E 上依测度收敛到 $|f|$.
5. 函数 f 在区间 $[a, b]$ 可微, 求证 f' 在区间 $[a, b]$ 可测.
6. 可测集 E 满足 $m(E) < \infty$. 一单调递增可测集列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足
 $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = E$. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f dm = \int_E f dm$.
7. 一可测集列 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$. f 为一恒正可测函数, 且满足 $\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f dm = 0$. 证明: $\liminf_{k \rightarrow \infty} m(E_k) = 0$.