数学科学学院 2019 级实变函数期末考试

2021 年 6 月 24 日

1.（15 分）如果直线上的集合 A 的任意两点间距离大于 1，证明 A 是至多可数集.

2.（15 分）设 $\{E_n\}_1^\infty$ 是 $\mathbf{R}$ 中的一列集合. 如果

$$\sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) < \infty,$$

则有

$$m(\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n) = 0.$$

3.（15 分）如果 $A, B, C \subseteq \mathbf{R}$ 满足 $m^*(A \triangle B) = m^*(B \triangle C) = 0$，则有 $m^*(A \triangle C) = 0$.

这里，记号 $A \triangle C$ 表示 A 与 B 的对称差.

4.（15 分）设函数列 f_n 在可测集 E 上依测度收敛于 f. 证明：$\{| f_n |\}$ 在 E 上依测度收敛于 $| f |$.

5.（15 分）设 f 是 $[a,\ b]$ 上的可测函数. 求证：f' 是 $[a,\ b]$ 上的可测函数.

6.（15 分）设 $m(E) < \infty$，f 是 E 上的可积函数，$\{E_n\}$ 是一列单调递增的可测集且

$$m(\lim_{n\to\infty} E_n) = E.$$

证明：

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f dm = \int_E f dm.$$

7.（10 分）设 f 是 $[0,\ 1]$ 上的可测函数而且严格取值大于零，$\{E_n\}_1^\infty$ 是 $[0,\ 1]$ 中的一列可测集. 如果

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \int_{E_n} f dm = 0,$$

则有

$$m(\underline{\lim_{n\to\infty}} E_n) = 0.$$