南开大学本科生2019- 2020学年第二学期《实变函数》期末考试试卷(A卷)

草 稿 区

任课教师: **专业:** **年级:** **学号:** **姓名:** **成绩:**

得 分

一、 (10分) 证明集合 A 是不可数集的充分必要条件是: A 是无限集, 并且对于 A 的任意可数子集 B, 有 A 与 $A \setminus B$ 是对等的.

得 分

二、 (15分) 设 A 为 $\mathbb{R}$ 中可测集, B 为 $\mathbb{R}$ 中另一集合. 若 A 中所包含的无理数与 B 中所包含的无理数完全相同. 证明: B 也为可测集且有 $m(A) = m(B)$.

草 稿 区

得 分

三、 (15分) 设 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\mathbb{R}$ 中一列可测集, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m(E_n) < +\infty$. 证明:

$$\limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$$

为零测集.

草 稿 区

得 分

四、 (15分) 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的有界可测函数. 证明: 存在一列定义在 E 上的简单函数 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 使得 $\{\varphi_n\}$ 在 E 上一致收敛于 f.

草 稿 区

得 分

五、 (15分) 设 f 为可测集 E 上的Lebesgue可积函数. 若对于任意的可测集 $E_0 \subset E$, 均有 $\int_{E_0} f dm = 0$. 证明: f 在 E 上几乎处处等于零.

得 分

六、 (15分) 假设在可测集 E 上, 函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 依测度收敛于 f. 如果还有 $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_E |f_n| dm < \infty$, 证明: f 在 E 上是Lebesgue可积的

草 稿 区

得 分

七、 (15分) 设 E 为可测集, $m(E) < +\infty$, 函数 f 在 E 上Lebesgue可积. 利用Lebesgue积分的绝对连续性证明:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot m(\{x \in E : |f(x)| > n\}) = 0.$$