南开大学本科生2018- 2019学年第二学期《实变函数》期末考试试卷(A卷)

草 稿 区

任课教师: 专业: 年级: 学号: 姓名: 成绩:

得 分

一、 (10分)证明: 可数集的所有有限子集组成的集合是可数集.

得 分

二、 (15分) 设 A, B 是 $\mathbb{R}$ 中外测度有限的两个集合, 试证明

$$|m^*(A) - m^*(B)| \leq m^*(A \triangle B).$$

草 稿 区

得 分

三、 (15分) 设E 是实数$\mathbb{R}$的子集, 则E是可测当且仅当对任意的$\varepsilon > 0$, 存在开集 $G \supset E$ 和闭集 $F \subset E$ 使得 $m(G \setminus F) < \varepsilon$.

得 分

四、 (15分) 设 $E \subset \mathbb{R}$ 是可测集. 则函数 f 在 E 上可测当且仅当对任意的开集 $G \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(G)$ 都是可测集合.

草 稿 区

得 分

五、 (15分) 设 $m(E) < \infty$ 且 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 E 上的实值可测函数列, 则 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 依测度收敛于 f 当且仅当: 对任意的子列 $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, 存在子列 $(f_{n_{k_i}})_{i=1}^{\infty}$, 使得 $(f_{n_{k_i}}(x))_{i=1}^{\infty}$ 几乎处处收敛于 $f(x)$.

草 稿 区

得 分

六、 (15分) 设 $m(E) < \infty$, $f(x)$是 E 上的可积函数, $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ 是单调递增的可测集列且 $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = E$. 试证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f dm = \int_E f dm.$$

草 稿 区

得 分

七、 (15分) 设 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 是一列非负可积函数, 且有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n dm = 0.$$

则 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 必依测度收敛于 0.