2015-2016 学年第二学期数学类实变函数期末考试

一. 设 A 是可数集, 集合 B 具有连续统的势, 求 $A\bigcup B$ 的势

二. 设 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是开集族且覆盖了集合 X, 证明:$\exists$ $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$,s.t.$\{G_{\alpha_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 覆盖 X

三. 设 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是可测集列,$\lim\limits_{n\to\infty} m(E_n)=1$, 证明: 存在子列 $\{E_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$,s.t. $m(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_{n_k})>\dfrac{1}{2}$

四. 设 $\{f_n\}$ 为可测函数列, 且 $f_n \xrightarrow{a.e.} f_0$,$g$ 几乎处处有穷且可测, 求证 $f_n g \xrightarrow{a.e.} f_0 g$

五. 设 E 是可测集, 证明:$2E$ 可测, 且 $m(2E)=2m(E)$

六. 讨论 $\lim\limits_{n\to}\displaystyle\int_{[0,1]}\frac{n\sqrt{x}\sin^3(mx)}{1+n^2x^2}dm$ 是否存在, 存在时请求出极限

七. 设 f 可积, 证明:$\displaystyle\int_R f(\pi x)dm=\frac{1}{\pi}\int_R f(x)dm$

八. 小明将绝对连续的定义记成 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,s.t.\forall\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^{n}$, 其中 $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^{n}$ 为不相交开区间, 且 $\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k-a_k|<\delta$, 有 $|\sum\limits_{k=1}^{n}(f(b_k)-f(a_k))|<\varepsilon$, 问 f 是否绝对连续