

南开大学数学科学学院 2015-2016 学年第一学期泛函分析期末考试  
(颜瑞民整理)

命题人: 王日生 考试时间: 2016 年 1 月 6 日

一、(20 分) 下列空间是自反的有 ( ), 是可分的有 ( ) .

- A.  $l^1$                       B.  $l^\infty$                       C.  $L^2[a, b]$                       D.  $(s)$   
E.  $C[a, b]$                       F.  $L^\infty[a, b]$                       G. 有限维赋范空间                      H. 完备的内积空间

二、(15 分)  $0 < t < 1, T(x)(t) = \int_0^t x(s) ds$ , 证明  $T$  为有界线性算子并求  $T$  的范数.

三、(15 分)  $X$  为有限维赋范空间,  $M$  为  $X$  的真子空间. 证明  $\exists x_0 \in \{x \mid \|x\| = 1\}$ , 使得  $d(x_0, M) = 1$ .

四、(15 分)  $X$  为赋范空间,  $E$  为  $X$  的子集,  $E$  是闭集, 证明  $E$  弱闭.

五、(10 分)  $X, Y$  为赋范空间,  $f \in X^*, g \in Y^*, h(x, y) = 2f(x) + 3g(y)$ . 证明  $h(x, y)$  是  $X \times Y$  上的有界线性算子并求其范数.

六、(10 分)  $X$  为赋范空间,  $x \in X, \forall f \in X^*, \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  收敛. 设  $S(f) = \{f_n(x)\}$ , 证明  $S: X^* \rightarrow (c)$  为闭算子.

七、(10 分)  $0 < t < 1, T(x) = x'(t)$ . 证明  $T$  为开算子.

八、(5 分)  $H$  为内积空间,  $M$  是  $H$  的真子空间, 证明  $M^\perp$  为  $H$  的闭子空间.

参考文献:

[1] 泛函分析. 王日生 [M]. 天津: 南开大学出版社, 2013.

南开大学物理科学学院 2013 级  
颜瑞民  
WeChat: yrm314