2020——2021 第一学期《有限群表示论》期末考试

命题人: 常亮

2021 年 1 月 7 日

一. （10 分） 设有限群 G 的不等价的一维复不可约表示的个数为 n, 证明 $n||G|$。

二. （15 分） 设 ρ 是有限群 G 的复不可约表示，H 是 G 的正规子群，设 $g=\sum_{h\in H} h$, 证明存在 $\lambda\in\mathbb{R}$, 使得 $\rho(g)=\lambda id_V$。

三. （25 分） 设 $G=<a,b|a^6=1,a^3=b^2,b^{-1}ab=a^{-1}>$，它的共轭类分别分别为 $C_1=\{1\}$，$C_2=\{a^3\}$,$C_3=\{a,a^5\}$,$C_4=\{a^2,^4\}$, $C_5=\{b,a^2b,a^4b\}$,$C_6=\{ab,a^3b,a^5b\}$。特征标表 (不完全) 如下:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	-1	-1	1	$\sqrt{-1}$	$-\sqrt{-1}$
χ_4						
χ_5	2	2	-1	-1	0	0
χ_6						

1. 补全特征标表中的 χ_4 和 χ_6。
2. 2 维复不可约表示中，哪个是忠实表示。哪个可以在实数域上实现。并说明理由。

四. （15 分） 将 $\mathbb{C}S_3$ 分解成单理想的直和, 并写出每个理想的中心幂等元。

五. （15 分） 设有限群 G 共有 k 个共轭类, 记为 C_i, 代表元为 g_i,$C_{g_i}(G)$ 为 g_i 的中心化子, 特征标构成矩阵 $C=(\chi_i(g_j))_{k\times k}$，证明:$|\det(C)|^2=\prod_{i=1}^k |C_{g_i}(G)|$。

六. （20 分） 1. (不必证明) 叙述诱导表示特征标的 Frobenius 互易定理。

2. 设 $H < G$, 且 H 是 Abel 群，证明 G 的每一个不可约表示的维数不会超过 $|G|/|H|$。

(回忆人: 物化 defector)