

数学科学学院2015级高等代数2-2期中考试

命题人:耿薇 (回忆人:张万鹏)

一、求二次曲面 $x^2 - 4y^2 - 2z^2 - 4xy + 4xz + 8yz - 6x - 4y - 4z + 9 = 0$ 的曲面类型.若是直纹面,则求出直母线方程.

二、求与直线 $l_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$, $l_2: \begin{cases} x = -1 \\ y = -z \end{cases}$, $l_3: \frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+2}{5}$ 都共面的直线形成的曲面方程.

三、已知 \mathbb{C} 是复数域, $M = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$.证明:

- (1) M 对矩阵的加法和数乘构成实数域上的线性空间, 并求出 M 的一组基和维数.
- (2) M 与 \mathbb{R}^4 同构.并写出一个同构映射.

四、已知 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基.证明: $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ 也是一组基.并求出 $\alpha = (n, n-1, \dots, 2, 1)$ 在新基下的坐标.

五、求由向量 α_i 生成的子空间与由向量 β_i 生成的子空间的交空间与和空间的基和维数.其中

$$\begin{cases} \alpha_1 = (1, 2, 1, 0) \\ \alpha_2 = (-1, 1, 1, 1) \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1 = (2, -1, 0, 1) \\ \beta_2 = (1, -1, 3, 7) \end{cases}$$

六、已知 $f(x)$ 、 $g(x)$ 是数域 \mathbf{P} 中的多项式且满足 $(f(x), g(x)) = 1$. $A \in \mathbf{P}^{n \times n}$, W 是 $f(A)g(A)X = 0$ 的解空间, V_1 是 $f(A)X = 0$ 的解空间, V_2 是 $g(A)X = 0$ 的解空间.求证: $W = V_1 \oplus V_2$.

七、设 $X'AX$ 是一秩为 n 的实二次型.证明:存在 \mathbb{R}^n 的一个 $\frac{n-|s|}{2}$ 维子空间 V (其中 s 为符号差数), 对任一 $X \in V$ 有 $X'AX = 0$.