2014-2015 学年第二学期数学类高等代数期末考试

1. 利用正交变换化 $5x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2-6x_1x_3+6x_2x_3=1$ 为标准型

2. 设 V 为 n 维欧式空间，对 $\alpha\in V, |\alpha|\neq 0, W=\{\beta|(\alpha,\beta)=0\}$,
(1). 证 W 是 V 的子空间
(2). 求 W 的维数与 $W^{\perp}$ 的一组基

3. 求以下矩阵的若当标准型

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 21 & -17 \\ 6 & 26 & -21 \end{pmatrix}$$

4. 设 V 为 n 维欧式空间，V 中线性变换 σ 有 $\sigma^2=\varepsilon$，证明：σ 在一组基下可表示为 $diag(-1,\cdots,-1,1,\cdots,1)$

5. 设 A 为一个 n 阶方阵，且已知 λ 是 A 的一个 k 重特征值，证明 $r(\lambda E-A)\geq n-k, r(\lambda E-A)^k=n-k$

6. 对于欧式空间 V 有向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_m$，且 $(\alpha_i,\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j),(i,j=1,\cdots,m)$. 证：$V_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 与 $V_2=L(\beta_1,\cdots,\beta_m)$ 同构

7. 设 A 为一个 n 阶方阵,若 $|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$,令 $g(\lambda)=\dfrac{f(\lambda)}{(f(\lambda),f'(\lambda))}$, 证明：$g(A)=0$ 与 A 可对角化互为充要条件。