2014-2015 抽象代数2-1期末考试试卷

一.（20分）判断:（判断正误，对的给出简单证明，错的举出反例）

(1)设G为群，H_1为G的子群，H_2为G的子群，H_3为G的子群，且$H_1\bigcup H_2=H_1\bigcup H_3$，则$H_2=H_3$.

(2)设G为群，N为G的正规子群，H为G的子群，且$H\simeq N$,则H为G的正规子群.

(3)域F_1到域F_2的同态，如果不是零同态，则为单同态.

(4)设K为F的扩域，且K作为F上的线性空间是无限维的，则K币不为F的代数扩张.

二.(15分) （1）设置换$\tau=\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 \\ 4\ 3\ 5\ 7\ 8\ 9\ 1\ 2\ 6 \end{pmatrix}$,求$\tau$的阶.

(2)求S_8中阶为3的元的个数.

三.（20分）设整环$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]=\{a+b\sqrt{-5}|a\in\mathbb{N},b\in\mathbb{N}\}$
(1)求$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$的单位.

(2)证明满足$a^2+5b^2=9$的$a+b\sqrt{-5}$不可约.

(3)证明$6+3\sqrt{-5}$与9没有最大公因子.

四.(15分)设R是无零因子环，R仅有有限个理想，证明R为除环.

五.(15分)(1)设$\alpha=\cos\frac{2\pi}{12}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{12}$，求$Irr(\alpha,\mathbb{Q})$.

(2)设$\beta=\sqrt[3]{2}$,$\gamma=\sqrt[3]{4}-\sqrt{2}+1$,请在$\mathbb{Q}[\beta]$中表示$\gamma^{-1}$.

六.(10分)证明n元交错群$A_n=<(123),(124),(125),\cdots,(12n)>$.

七.(5分)设R为环，对于$a\in R$，若$\exists b\in R$，使得$a+b-ab=0$,则称a为拟可逆元。
证明：R为除环当且仅当R中只有一个不是拟可逆元而其余元均为拟可逆元.