2013-2014 学年第二学期伯苓班高等代数期末试题

一.(10 分) 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 为 3 维 Euclid 空间 V 的标准正交基。令

$$\beta_1=\frac{1}{3}(2\varepsilon_1+2\varepsilon_2-\varepsilon_3),\beta_2=\frac{1}{3}(2\varepsilon_1-\varepsilon_2+2\varepsilon_3),\beta_3=\frac{1}{3}(\varepsilon_1-2\varepsilon_2-2\varepsilon_3)$$

那么 β_1,β_2,β_3 是否是标准正交基呢？说明理由

二.(20 分) 用正交线性替换将下述二次型化为标准形：

$$\sum_{i=1}^{4}x_i^2+4\sum_{1\leq i<j\leq 4}x_ix_j$$

三.(10 分) 设 V 是数域 P 上 3 维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是一组基，f_1,f_2,f_3 是其对偶基，定义另一组基 $e_1=\varepsilon_1-\varepsilon_3,e_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3,e_3=\varepsilon_2+\varepsilon_3$，试求它的对偶基.

四.(15 分) 设 A 是数域 P 上的 n 阶方阵，证明 A 相似于 A'

五.(15 分) 设 V 是 C 上 n 维线性空间，$\mathscr{A}\in EndV$. 证明：$\mathscr{A}$ 在某组基下的矩阵为对角矩阵的充分必要条件是对 $\mathscr{A}$ 的任一不变子空间 W, 存在不变子空间 W', 使得 $V=W\oplus W'$

六.(10 分) 设 $\mathscr{A}$ 是欧式空间 V 的正规变换，证明：$\ker\mathscr{A}=\ker\mathscr{A}^*,\mathscr{A}V=\mathscr{A}^*V$

七.(10 分) 对于 n 阶矩阵 A 和 B，定义 $A\otimes B$ 为这样的分块矩阵，其中 (i,j) 块为 $(ent_{ij}A)B,1\leq i,j\leq n$. 若 A,B 都是正定矩阵，证明：$A\otimes B$ 也是正定矩阵

八.(10 分) 求过 $M(2,1,3)$ 的单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{4}+y^2-\dfrac{z^2}{9}=1$ 的两条直母线